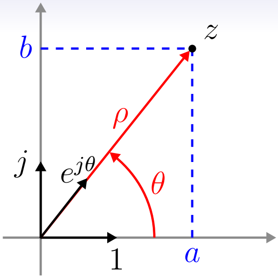
Rappels sur les nombres complexes

pour le cours Signaux et Systèmes

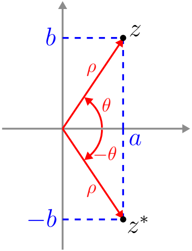
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Notions de base

- j: nombre imaginaire tel que $j^2 = -1$
- Un nombre complexe
  = un point dans le plan
- Deux caractérisations possibles:
  - Forme cartésienne:
    $z = a + jb$ $(a, b \in \mathbb{R})$
  - Forme trigonométrique/polaire:
    $z = \rho e^{j\theta}$ ($\rho \in \mathbb{R}^+$; $\theta \in \mathbb{R}$ en radians, défini modulo 2π)



- Formule d'Euler: $e^{j\theta} = \exp(j\theta) = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$
- Terminologie et notations:
  - Partie réelle: $\mathfrak{Re}\{z\} = a$ $\quad (= \rho\cos(\theta))$
  - Partie imaginaire: $\mathfrak{Im}\{z\} = b$ $\quad (= \rho\sin(\theta))$
  - Module: $|z| = \rho$ $\quad (= \sqrt{a^2 + b^2})$
  - Argument/phase/angle:
    $\mathrm{Arg}\ z = \Phi(z) = \theta$ $\quad (= \arctan(b/a) \mod 2\pi$ si $a > 0)$
- Conjugaison complexe: $z^* = a - jb = \rho e^{-j\theta}$



Formulaire

- Module et argument du complexe conjugué:

  $|z^*| = |z| \qquad \mathrm{Arg}\ z^* = -\mathrm{Arg}\ z$

- Somme/différence/produit/quotient avec le conjugué:

  $$z + z^* = 2\mathfrak{Re}\{z\} \qquad z - z^* = 2j\mathfrak{Im}\{z\}$$
  $$zz^* = |z|^2 \qquad z/z^* = e^{j2\mathrm{Arg}\ z}$$

- Distributivité de la conjugaison par rapport aux 4 opérations: en particulier $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$ et $(1/z)^* = 1/z^*$
- Module et argument d'un produit:

  $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \qquad \mathrm{Arg}\ z_1 z_2 = \mathrm{Arg}\ z_1 + \mathrm{Arg}\ z_2$

- Inversion: $1/z = z^*/|z|^2$, en particulier $|z| = 1 \Rightarrow 1/z = z^*$
- Module et argument de l'inverse:

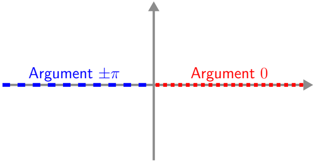
  $|1/z| = 1/|z| \qquad \mathrm{Arg}\ 1/z = -\mathrm{Arg}\ z$

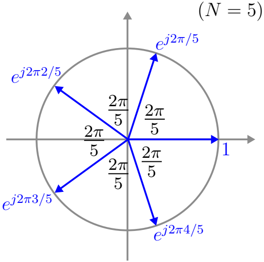
- Variantes de la formule d'Euler:

  $\cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$

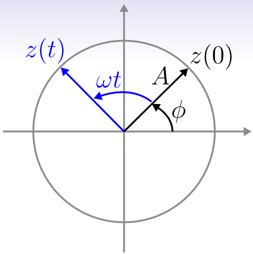
Autres propriétés

- Caractérisation de l'axe réel:
  - $z \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathrm{Arg}\ z = \begin{cases} 0 \text{ si } z > 0 \\ \pi \text{ si } z < 0 \end{cases}$
  - $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathfrak{Im}\{z\} = 0 \Leftrightarrow z = z^*$
- Caractérisation du cercle unité:
  $|z| = 1 \Rightarrow z$ de la forme $z = e^{j\theta}$
- Racines $N^{\text{èmes}}$ de l'unité:
  - L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^N = 1$ est $\{e^{j2\pi n/N}; n = 0, \dots, N-1\}$.
  - Propriété: $\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi n/N} = 0$





Sinusoïdes complexes



- Forme générale: $z(t) = Ae^{j(\omega t + \phi)}$
  - $A \in \mathbb{R}^+$: amplitude (réelle et positive)
  - $\omega \in \mathbb{R}$: fréquence (en radians par unité de temps)
  - $\phi \in \mathbb{R}$: phase à l'origine (pour $t = 0$)
- Propriétés:
  - Périodicité: $z(t + 2\pi/\omega) = z(t)$
  - Décalage: $z(t - t_0) = e^{-j\omega t_0} z(t)$
- Représentation graphique: $(A = 4,\ \omega = \pi/3,\ \phi = -\pi/2)$